

# 线性代数 I

## 1 线性方程组与行简化阶梯形

### 1.1 行简化阶梯形

行简化阶梯矩阵满足：

1. 零行在非零行下方；
2. 每个非零行首个非零元为 1；
3. 主元所在列其余元素全为 0；
4. 主元位置从上到下向右移动。

线性方程组化为简化阶梯形后：

- 出现  $0 = d$  ( $d \neq 0$ ) 则无解；
- 无矛盾行且每个未知量都是主变量，则唯一解；
- 有自由变量则有无穷多解，可令自由变量为参数。

### 1.2 齐次与非齐次方程组

齐次方程组：

$$Ax = 0.$$

若  $A$  为  $m \times n$  矩阵， $r = \text{rank}A$ ，则解空间维数为

$$\dim \ker A = n - r.$$

非齐次方程组：

$$Ax = b$$

有解当且仅当

$$\text{rank}A = \text{rank}(A|b).$$

若  $x_0$  为一个特解，则全体解为

$$x = x_0 + x_h, \quad x_h \in \ker A.$$

补充：

- 非齐次方程组是否唯一，在有解前提下由对应齐次方程组是否只有零解决定。
- 若  $\ker A$  的一组基为  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ ，则齐次解为
$$x = c_1\eta_1 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r}.$$

### 1.3 本章例题

例 1: 讨论方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

的解。

解：第二个方程是第一个方程的两倍，秩为 1，未知量个数为 3，有两个自由变量。令  $y = s, z = t$ ，则

$$x = 1 - s - t.$$

通解为

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1).$$

例 2: 求齐次方程

$$x + y + z = 0$$

的基础解系。

解：令  $y = s, z = t$ ，则  $x = -s - t$ 。因此

$$(x, y, z) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1),$$

基础解系可取

$$(-1, 1, 0), \quad (-1, 0, 1).$$

## 2 线性空间、子空间与生成

### 2.1 线性空间定义

设  $F$  为数域,  $V$  为非空集合。若  $V$  上有加法与数乘, 满足:

1.  $x + y = y + x$ ;
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
3. 存在零元  $0$ ,  $x + 0 = x$ ;
4. 对每个  $x$  存在  $-x$ ,  $x + (-x) = 0$ ;
5.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ;
6.  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;
7.  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ ;
8.  $1x = x$ ;

则称  $V$  是  $F$  上的线性空间。

例子:

- $F^n$ ;
- $F^{m \times n}$ ;
- $F[x]$ ;
- $C[a, b]$ ;
- 数列空间。

注意:

- 同一个集合在不同数域上可能是不同线性空间;
- $\mathbb{C}$  可看作  $\mathbb{C}$  上线性空间, 也可看作  $\mathbb{R}$  上线性空间;
- $\mathbb{R}$  不是  $\mathbb{C}$  上的线性空间;
- 整数集  $\mathbb{Z}$  不是数域, 不能作为线性空间的标量域。

### 2.2 基本性质

在线性空间中:

$$\begin{aligned} 0 \text{ 唯一}, \quad -x \text{ 唯一}. \\ 0x = 0, \quad \lambda 0 = 0, \quad (-1)x = -x. \end{aligned}$$

证明: 若  $0, 0'$  都是零元, 则

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

若  $y, z$  都是  $x$  的负元, 则

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z.$$

### 2.3 子空间

设  $W \subseteq V$ ,  $W \neq \emptyset$ . 则  $W$  是子空间当且仅当

$$\forall x, y \in W, \forall \lambda, \mu \in F, \quad \lambda x + \mu y \in W.$$

常用判别:

1. 非空;
2. 加法封闭;
3. 数乘封闭。

## 2.4 线性组合与线性包

向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  的线性组合:

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n.$$

$S$  的线性包:

$$L(S) = \text{span}(S).$$

定理:

1.  $L(S)$  是子空间;
2.  $L(S)$  是包含  $S$  的最小子空间;
3. 若  $S \subseteq W$  且  $W$  为子空间, 则  $L(S) \subseteq W$ .

证明: 直接验证  $L(S)$  对线性组合封闭; 最小性由任意包含  $S$  的子空间必须包含  $S$  的所有线性组合得出。

## 2.5 本章例题

例 1: 判断

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 0\}$$

是否为  $\mathbb{R}^3$  的子空间。

解: 若  $u, v \in W$ , 则坐标和都为 0。对任意  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v$  的坐标和仍为 0, 所以  $\lambda u + \mu v \in W$ 。故  $W$  是子空间。

例 2: 判断

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 1\}$$

是否为子空间。

解:  $(0, 0) \notin S$ , 所以  $S$  不是子空间。

例 3: 在  $\mathbb{R}[x]$  中, 证明

$$W = \{p(x): p(0) = 0\}$$

是子空间。

解: 若  $p(0) = q(0) = 0$ , 则

$$(\lambda p + \mu q)(0) = \lambda p(0) + \mu q(0) = 0.$$

故  $W$  对线性组合封闭。

## 3 线性相关、基、维数与秩

### 3.1 线性相关与线性无关

向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性相关, 若存在不全为 0 的  $k_i$ , 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0.$$

若只有  $k_1 = \dots = k_n = 0$ , 则线性无关。

重要结论:

- 含零向量的向量组必线性相关;
- 线性相关组增加向量后仍线性相关;
- 线性无关组任意子组线性无关;
- 有限向量组线性相关, 当且仅当其中某个向量可由其余向量线性表示。

证明: 若

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

且某  $k_i \neq 0$ , 则

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i} \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j.$$

例子:

- $e_1, \dots, e_n$  线性无关;
- $1, x, x^2$  作为多项式线性无关;
- 在有限域上要区分多项式与多项式函数, 例如  $\mathbb{Z}_2$  上可能出现非零多项式对应零函数。

### 3.2 替换定理

若  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性无关, 且都可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示, 则

$$m \leq n.$$

证明: 逐步用  $\beta_i$  替换  $\alpha_j$ , 保持生成空间不变, 最终推出不能替换超过  $n$  个。

推论:

- 有限维空间任意两组基元素个数相同;
- $n$  维空间任意  $n+1$  个向量线性相关;
- $n$  维空间任意  $n$  个线性无关向量构成基;
- $n$  维空间任意  $n$  个生成向量构成基。

### 3.3 基与维数

若向量组  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  满足:

1. 线性无关;
2.  $L(B) = V$ ;

则称  $B$  是  $V$  的一组基,  $\dim V = n$ 。

零空间维数为 0。

### 3.4 子空间维数

若  $W \leq V$ ,  $\dim V < \infty$ , 则

$$\dim W \leq \dim V.$$

若  $\dim W = \dim V$ , 则  $W = V$ 。

子空间的一组基可扩充为整个空间的一组基。

### 3.5 向量组的秩

向量组  $S$  的极大线性无关组所含向量个数称为  $S$  的秩:

$$\text{rank}(S).$$

若  $B$  是  $S$  的极大线性无关组, 则

$$L(B) = L(S), \quad \text{rank}(S) = \dim L(S).$$

等价向量组: 若  $S$  中每个向量可由  $T$  线性表示, 且  $T$  中每个向量可由  $S$  线性表示, 则  $S, T$  等价, 且

$$L(S) = L(T), \quad \text{rank}(S) = \text{rank}(T).$$

### 3.6 坐标

若  $B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  是  $V$  的一组基, 则任意  $x \in V$  唯一表示为

$$x = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n.$$

列向量

$$[x]_B = (x_1, \dots, x_n)^T$$

称为  $x$  在基  $B$  下的坐标。

### 3.7 本章例题

例 1: 证明  $e_1, \dots, e_n$  线性无关。

解: 若

$$k_1 e_1 + \dots + k_n e_n = 0,$$

则左边坐标为  $(k_1, \dots, k_n)$ , 所以  $k_1 = \dots = k_n = 0$ 。

例 2: 证明  $1, x, x^2$  在  $\mathbb{R}[x]$  中线性无关。

解: 若

$$a + bx + cx^2 = 0$$

作为多项式恒等于零, 则各项系数都为 0, 即  $a = b = c = 0$ 。

例 3: 求向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (1, 0, 1), \quad \alpha_3 = (2, 1, 1)$$

的秩。

解: 因为

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

且  $\alpha_1, \alpha_2$  不成比例, 所以极大线性无关组可取  $\alpha_1, \alpha_2$ , 秩为 2。

例 4: 在基  $B = (\alpha_1, \alpha_2)$  中, 若

$$x = 3\alpha_1 - 2\alpha_2,$$

则

$$[x]_B = (3, -2)^T.$$

## 4 子空间的交、和与直和

### 4.1 交空间与和空间

交:

$$W_1 \cap W_2 = \{x: x \in W_1, x \in W_2\}.$$

和:

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2: x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}.$$

$W_1 + W_2$  是包含  $W_1 \cup W_2$  的最小子空间。

注意:  $W_1 \cup W_2$  一般不是子空间, 除非  $W_1 \subseteq W_2$  或  $W_2 \subseteq W_1$ 。

### 4.2 维数公式

若  $W_1, W_2$  有限维, 则

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

证明: 取  $W_1 \cap W_2$  的基, 分别扩充为  $W_1, W_2$  的基, 再证明合并后的向量组是  $W_1 + W_2$  的基。

### 4.3 直和

若

$$W_1 \cap W_2 = \{0\},$$

则称

$$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2.$$

等价条件:

1.  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ;
2. 每个  $x \in W_1 + W_2$  可唯一表示为  $x = x_1 + x_2$ ;
3. 有限维时  $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ 。

多个子空间直和:

$$W_1 + \cdots + W_s$$

为直和, 当且仅当

$$x_1 + \cdots + x_s = 0, x_i \in W_i \Rightarrow x_1 = \cdots = x_s = 0.$$

#### 4.4 本章例题

例 1: 设

$$U = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(0, y): y \in \mathbb{R}\}.$$

证明  $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ .

解: 任意  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

且  $U \cap W = \{0\}$ , 故为直和。

例 2: 设  $U = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ ,  $W = \text{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ 。求  $\dim(U + W)$ 。

解:  $\dim U = 2$ ,  $\dim W = 2$ ,  $U \cap W = \text{span}\{(0, 1, 0)\}$ , 维数为 1。故

$$\dim(U + W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

## 5 内积空间

### 5.1 内积定义

在实线性空间  $V$  上, 内积是映射

$$(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

满足:

1. 对第一个变量线性;
2. 对称性  $(x, y) = (y, x)$ ;
3. 正定性  $(x, x) \geq 0$ , 且  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 。

例子:

- $\mathbb{R}^n$  中

$$(x, y) = x^T y.$$

- $C[a, b]$  中

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

### 5.2 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

证明: 对任意  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(x + ty, x + ty) \geq 0.$$

视为关于  $t$  的二次多项式, 其判别式不大于 0。

等号成立当且仅当  $x, y$  线性相关。

### 5.3 范数与夹角

范数:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

三角不等式:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

夹角:

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

## 5.4 正交与标准正交基

若  $(x, y) = 0$ , 则称  $x \perp y$ 。

非零两两正交向量组必线性无关。

标准正交基:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Schmidt 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1, \\ \beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i,$$

再归一化:

$$e_k = \frac{\beta_k}{\|\beta_k\|}.$$

## 5.5 本章例题

例 1: 在  $\mathbb{R}^2$  中, 对

$$\alpha_1 = (1, 1), \quad \alpha_2 = (1, 0)$$

作 Schmidt 正交化。

解: 取

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1).$$

再取

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

单位化得

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

例 2: 验证  $C[a, b]$  上

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

是内积。

解: 线性性与对称性由积分线性和乘法交换律得到。又

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0.$$

若  $f$  连续且积分为 0, 则  $f^2 \equiv 0$ , 故  $f \equiv 0$ 。

## 6 线性映射

### 6.1 线性映射定义

设  $V, W$  是  $F$  上线性空间, 映射  $T: V \rightarrow W$  若满足

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y),$$

则称为线性映射。

基本性质:

$$T(0) = 0, \quad T(-x) = -T(x).$$

若  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的基,  $\beta_1, \dots, \beta_n \in W$  任意, 则存在唯一线性映射  $T: V \rightarrow W$ , 使

$$T(\alpha_i) = \beta_i.$$

## 6.2 像与核

像:

$$\text{Im}T = \{T(x): x \in V\}.$$

核:

$$\text{ker}T = \{x \in V: T(x) = 0\}.$$

$\text{Im}T$  是  $W$  的子空间,  $\text{ker}T$  是  $V$  的子空间。

单射判别:

$$T \text{ 单射} \Leftrightarrow \text{ker}T = \{0\}.$$

## 6.3 秩-零化度定理

若  $\dim V < \infty$ , 则

$$\dim V = \dim \text{ker}T + \dim \text{Im}T.$$

证明: 取  $\text{ker}T$  的基, 扩充为  $V$  的基; 证明扩充部分在  $T$  下的像构成  $\text{Im}T$  的一组基。

若  $\dim V = \dim W < \infty$ , 则以下等价:

1.  $T$  单射;
2.  $T$  满射;
3.  $T$  双射;
4.  $\text{ker}T = \{0\}$ ;
5.  $\text{Im}T = W$ 。

## 6.4 同构

若存在双射线性映射  $T: V \rightarrow W$ , 则  $V, W$  同构, 记作

$$V \cong W.$$

有限维情形:

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W.$$

## 6.5 线性映射空间

全体线性映射

$$L(V, W) = \{T: V \rightarrow W: T \text{ 线性}\}$$

在逐点加法与数乘下构成线性空间。

若  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ , 则

$$\dim L(V, W) = mn.$$

线性映射的复合仍为线性映射。

## 6.6 本章例题

例 1: 设  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

求  $\text{ker}T$  与  $\text{Im}T$ 。

解:  $\text{ker}T$  满足

$$x + y = 0, \quad y + z = 0.$$

令  $y = t$ , 则  $x = -t, z = -t$ , 所以

$$\text{ker}T = \text{span}\{(-1, 1, -1)\}.$$

矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

秩为 2, 故  $\text{Im}T = \mathbb{R}^2$ 。

例 2: 在线性空间  $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  中, 求求导映射  $D(p) = p'$  的核与像。

解: 核为常数多项式空间, 维数为 1。像为  $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ , 维数为 2。这也验证  
 $\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = 3 = 1 + 2$ 。

## 7 线性映射的矩阵表示与矩阵运算

### 7.1 矩阵表示

设  $V$  基为  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $W$  基为  $\beta_1, \dots, \beta_m$ 。若

$$T(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + \dots + a_{mj}\beta_m,$$

则

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

是  $T$  在这两组基下的矩阵。

若  $x$  在  $\alpha$  基下坐标为  $X$ ,  $T(x)$  在  $\beta$  基下坐标为  $Y$ , 则

$$Y = AX.$$

### 7.2 矩阵乘法

若  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , 则

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

复合对应乘法:

$$M(S \circ T) = M(S)M(T).$$

矩阵乘法一般不可交换。

### 7.3 可逆矩阵

$n$  阶方阵  $A$  可逆, 若存在  $B$ , 使

$$AB = BA = I.$$

等价条件:

1.  $A$  可逆;
2.  $Ax = 0$  只有零解;
3.  $Ax = b$  对任意  $b$  有唯一解;
4.  $\text{rank} A = n$ ;
5.  $\det A \neq 0$ ;
6.  $A$  是初等矩阵的乘积。

### 7.4 转置与特殊矩阵

转置:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

性质:

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

对称矩阵:

$$A^T = A.$$

反对称矩阵:

$$A^T = -A.$$

实反对称矩阵对角元为 0。

## 7.5 初等矩阵与初等变换

三类初等变换:

1. 交换两行;
2. 某行乘非零常数;
3. 某行加另一行的倍数。

对单位矩阵作一次初等变换得到初等矩阵。

左乘初等矩阵对应行变换, 右乘初等矩阵对应列变换。

初等矩阵可逆, 其逆仍为初等矩阵。

## 7.6 相抵标准形

若存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使

$$B = PAQ,$$

则  $A, B$  相抵。

任意  $m \times n$  矩阵都相抵于

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $r = \text{rank}A$ 。

同型矩阵相抵当且仅当秩相同。

## 7.7 基变换与坐标变换

若两组基满足

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P,$$

则  $P$  为过渡矩阵。

坐标关系:

$$X_\alpha = PX_\beta, \quad X_\beta = P^{-1}X_\alpha.$$

若线性变换在两组基下矩阵为  $A, B$ , 则

$$B = P^{-1}AP.$$

## 7.8 本章例题

例 1: 设  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$T(x, y) = (x + y, 2y).$$

求  $T$  在标准基下的矩阵。

解:

$$T(e_1) = (1, 0), \quad T(e_2) = (1, 2).$$

故矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 2: 求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵。

解: 设

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由  $AA^{-1} = I$  解得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

例 3: 设新基满足  $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)P$ , 且

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若  $X_\beta = (2, 3)^T$ , 求  $X_\alpha$ .

解:

$$X_\alpha = PX_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## 8 行列式

### 8.1 行列式性质

行列式满足:

1. 交换两行, 行列式变号;
2. 某行乘  $k$ , 行列式乘  $k$ ;
3. 某行加另一行倍数, 行列式不变;
4. 两行相同或成比例, 行列式为 0;
5. 三角矩阵行列式等于对角线元素乘积;
6.  $\det A^T = \det A$ ;
7.  $\det(AB) = \det A \det B$ .

### 8.2 代数余子式展开

删去第  $i$  行第  $j$  列所得行列式称余子式  $M_{ij}$ 。代数余子式:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

按第  $i$  行展开:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

按第  $j$  列展开:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

某一行元素与另一行对应代数余子式乘积求和为 0。

### 8.3 伴随矩阵

伴随矩阵:

$$A^* = (A_{ji}).$$

性质:

$$AA^* = A^*A = (\det A)I.$$

若  $\det A \neq 0$ , 则

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

### 8.4 行列式秩

矩阵  $A$  的非零子式最高阶数等于矩阵秩:

当且仅当  $A$  有  $r$  阶非零子式, 且所有  $r+1$  阶子式均为 0。

$$\text{rank}A = r$$

## 8.5 Cramer 法则

若  $\det A \neq 0$ , 则

$$Ax = b$$

有唯一解

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

## 8.6 本章例题

例 1: 计算

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

解: 上三角矩阵行列式等于对角线元素乘积, 故为

$$1 \cdot 4 \cdot 6 = 24.$$

例 2: 求

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵。

解:

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

若  $ad - bc \neq 0$ , 则

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 3: 用 Cramer 法则解

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -2.$$

于是

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 1.$$

## 9 特征值、特征向量与对角化

### 9.1 特征值与特征向量

若  $x \neq 0$  且

$$Ax = \lambda x,$$

则  $\lambda$  为特征值,  $x$  为对应特征向量。

特征多项式:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

特征子空间:

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

相似矩阵有相同特征多项式、迹、行列式和特征值。

## 9.2 不同特征值的特征向量

属于不同特征值的非零特征向量线性无关；更一般地，不同特征子空间中各取一组线性无关向量，合并后仍线性无关。

证明：对特征值个数归纳，或用

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$$

构造线性关系并消去。

## 9.3 可对角化

$A$  在数域  $F$  上可对角化，当且仅当存在  $F$  上可逆矩阵  $P$ ，使

$$P^{-1}AP = D$$

为对角矩阵。

等价条件：

1.  $F^n$  有一组由  $A$  的特征向量组成的基；

2.  $F$  中所有不同特征值对应的特征子空间维数之和为  $n$ ：

$$\sum_i \dim E_{\lambda_i} = n.$$

若  $A$  在  $F$  中有  $n$  个互异特征值，则  $A$  在  $F$  上可对角化。

注意：几何重数不超过代数重数。

## 9.4 实对称矩阵的正交对角化

若  $A = A^T$ ，则：

1. 特征值均为实数；

2. 不同特征值对应特征向量正交；

3. 存在正交矩阵  $Q$ ，使

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

证明：可用 Rayleigh 商极值或复化后的谱定理证明存在实特征值，再对其正交补归纳。

## 9.5 本章例题

例 1：求

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量。

解：特征值为 2, 3。对应特征子空间分别为

$$E_2 = \text{span}\{(1, 0)^T\}, \quad E_3 = \text{span}\{(0, 1)^T\}.$$

例 2：判断

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是否可对角化。

解：唯一特征值为 1。解  $(A - I)x = 0$  得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

故  $y = 0$ ，特征子空间维数为  $1 < 2$ ，不可对角化。

例 3：正交对角化

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解：标准基已经是标准正交特征向量组，取  $Q = I$ ，则

$$Q^T A Q = \text{diag}(2, 3).$$

## 10 二次型、合同与正定

### 10.1 双线性函数与二次型

双线性函数  $B(x, y)$  对两个变量分别线性。

二次型：

$$Q(x) = B(x, x).$$

在坐标下可写为

$$Q(x) = x^T A x,$$

其中只需考虑  $B$  的对称部分，因此  $A$  可取实对称矩阵。

### 10.2 合同

若存在可逆矩阵  $C$ ，使

$$B = C^T A C,$$

则称  $A, B$  合同。

合同对应二次型的可逆线性替换。

### 10.3 标准形与规范形

二次型可通过合同变换化为标准形：

$$d_1 y_1^2 + \cdots + d_r y_r^2.$$

实二次型还可化为规范形：

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2.$$

### 10.4 惯性定理

规范形中正平方项个数  $p$  与负平方项个数  $q$  唯一确定，分别称正惯性指数与负惯性指数。

矩阵合同不改变秩、正惯性指数、负惯性指数。

### 10.5 正定二次型与正定矩阵

实对称矩阵  $A$  正定，若

$$x^T A x > 0, \quad x \neq 0.$$

等价条件：

1.  $A$  正定；
2.  $A$  的特征值全为正；
3. 存在可逆矩阵  $P$ ，使

$$A = P^T P;$$

4.  $A$  的所有顺序主子式均为正：

$$\Delta_k > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

半正定：

$$x^T A x \geq 0.$$

半正定等价于所有特征值非负；也等价于所有主子式非负。

- 判断给定二次型是否正定；
- 用特征值判断正定；
- 用顺序主子式判断正定；

- 证明 Gram 矩阵正定: 若  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性无关, 则  $G = ((\alpha_i, \alpha_j))$  正定。

## 10.6 本章例题

例 1: 化二次型

$$Q(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$$

为标准形。

解:

$$Q = (x + y)^2 + y^2.$$

令  $u = x + y, v = y$ , 则

$$Q = u^2 + v^2.$$

因此它正定。

例 2: 判断

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

是否正定。

解: 顺序主子式

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 3 > 0.$$

故  $A$  正定。

例 3: 证明线性无关向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  的 Gram 矩阵

$$G = ((\alpha_i, \alpha_j))$$

正定。

解: 任取  $c = (c_1, \dots, c_n)^T \neq 0$ , 有

$$c^T G c = \left( \sum_i c_i \alpha_i, \sum_j c_j \alpha_j \right) = \left\| \sum_i c_i \alpha_i \right\|^2.$$

因  $\alpha_i$  线性无关,  $\sum_i c_i \alpha_i \neq 0$ , 故  $c^T G c > 0$ 。

## 11 计算题与证明题模板

这一部分把散落的计算流程集中起来。

### 11.1 判断向量组线性相关

给定向量组

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F^n.$$

方法:

1. 组成矩阵

$$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

2. 解齐次方程

$$Ax = 0.$$

3. 若只有零解, 则线性无关; 若有非零解, 则线性相关。

等价地:

- 若  $\text{rank} A = s$ , 列向量组线性无关;
- 若  $\text{rank} A < s$ , 列向量组线性相关。

特殊快速判断:

- 含零向量必相关;

- 向量个数超过空间维数必相关；
- 两个非零向量相关当且仅当成比例；
- 正交的非零向量组必无关。

## 11.2 求极大线性无关组和秩

给定向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ：

1. 以这些向量为列组成矩阵  $A$ ；
2. 对  $A$  作初等行变换化为阶梯形；
3. 主元列对应的原向量构成极大线性无关组；
4. 主元个数就是秩。

注意：行变换会改变列向量本身，但不改变列向量之间的线性关系，所以要取“原矩阵的主元列”。

## 11.3 求子空间的一组基

### 11.3.1 由生成向量给出

若

$$W = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s),$$

则从  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  中取极大线性无关组，即为  $W$  的一组基。

### 11.3.2 由方程给出

若

$$W = \{x \in F^n : Ax = 0\},$$

则解齐次方程组，写出基础解系，即为  $W$  的一组基。

步骤：

1. 化  $A$  为行简化阶梯形；
2. 找主变量和自由变量；
3. 分别令一个自由变量为 1、其余为 0；
4. 得到基础解系。

## 11.4 证明两个子空间相等

常用方法：

1. 双包含：

$$U \subseteq W, \quad W \subseteq U.$$

2. 有限维情形：

$$U \subseteq W, \quad \dim U = \dim W \Rightarrow U = W.$$

3. 证明二者有同一组基。
4. 证明二者由等价向量组生成。

## 11.5 直和判定

要证明

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

通常证明：

1.  $V = W_1 + W_2$ ；
2.  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 。

或者证明：任意  $v \in V$  都能唯一表示为

$$v = w_1 + w_2, \quad w_i \in W_i.$$

有限维快捷法：若

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

且

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2,$$

则

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

## 11.6 Schmidt 正交化流程

给定线性无关组

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

先正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1, \\ \beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i.$$

再单位化：

$$e_k = \frac{\beta_k}{\|\beta_k\|}.$$

得到标准正交组

$$e_1, \dots, e_n.$$

常见检查：

$$(\beta_k, \beta_i) = 0, \quad i < k.$$

## 11.7 线性映射题模板

### 11.7.1 由基上的取值确定线性映射

若  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的基，给定  $\beta_1, \dots, \beta_n \in W$ ，则唯一线性映射  $T$  满足

$$T(\alpha_i) = \beta_i.$$

对任意

$$x = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n,$$

有

$$T(x) = x_1 \beta_1 + \dots + x_n \beta_n.$$

### 11.7.2 求核与像

若线性映射矩阵为  $A$ ：

• 核：

$$\ker T = \{x: Ax = 0\};$$

• 像：

$$\text{Im} T = L(A \text{ 的列向量}).$$

因此：

$$\dim \ker T = n - r(A), \quad \dim \text{Im} T = r(A).$$

### 11.7.3 判断单射、满射

若  $T: F^n \rightarrow F^m$ ，矩阵为  $A_{m \times n}$ ：

- 单射  $\Leftrightarrow r(A) = n$ ;
- 满射  $\Leftrightarrow r(A) = m$ ;
- 双射  $\Leftrightarrow m = n = r(A)$ 。

## 11.8 求线性映射矩阵

设  $V$  的基为  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $W$  的基为  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 。

步骤:

1. 分别计算  $T(\alpha_j)$ ;
2. 把  $T(\alpha_j)$  用  $\beta$  线性表示:

$$T(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + \dots + a_{mj}\beta_m;$$

3. 第  $j$  列就是

$$(a_{1j}, \dots, a_{mj})^T.$$

坐标公式:

$$[T(x)]_\beta = A[x]_\alpha.$$

## 11.9 矩阵可逆题模板

证明  $A$  可逆可选:

1. 构造  $B$  使  $AB = BA = I$ ;
2. 证明  $\det A \neq 0$ ;
3. 证明  $r(A) = n$ ;
4. 证明  $Ax = 0$  只有零解;
5. 证明列向量组构成  $F^n$  的一组基;
6. 证明  $A$  是初等矩阵乘积。

求逆方法:

1. 初等行变换:

$$(A | I) \rightarrow (I | A^{-1}).$$

2. 伴随矩阵:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

3. 分块矩阵法。

4. 利用矩阵多项式, 例如若

$$A^2 - 3A + 2I = 0,$$

且常数项非零, 则可解出  $A^{-1}$ 。

## 11.10 行列式计算方法

常用方法:

1. 初等变换化三角;
2. 按行/列展开;
3. 提取公因子;
4. 递推法;
5. 加边升阶法;
6. 利用 Vandermonde 行列式:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

7. 分块行列式;

8. 利用

$$\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA).$$

注意初等变换对行列式的影响:

- 交换两行: 变号;
- 某行乘  $k$ : 行列式乘  $k$ ;
- 某行加另一行倍数: 行列式不变。

### 11.11 线性方程组题模板

对于

$$Ax = b$$

先比较秩:

• 无解:

$$r(A) < r(A|b).$$

• 唯一解:

$$r(A) = r(A|b) = n.$$

• 无穷多解:

$$r(A) = r(A|b) < n.$$

通解写法:

1. 求一个特解  $x_0$ ;
2. 求齐次方程基础解系  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ ;
3. 写

$$x = x_0 + c_1\eta_1 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r}.$$

### 11.12 特征值与对角化流程

给定  $n$  阶矩阵  $A$ 。

1. 求特征多项式:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

2. 求特征值  $\lambda_i$ 。

3. 对每个  $\lambda_i$  解

$$(A - \lambda_i I)x = 0$$

得特征子空间  $E_{\lambda_i}$ 。

4. 统计

$$\sum_i \dim E_{\lambda_i}.$$

5. 若和为  $n$ , 则可对角化。

构造对角化: 取一组特征向量基作为  $P$  的列, 则

$$P^{-1}AP = D.$$

快速充分条件: 若  $A$  在所讨论数域中有  $n$  个互异特征值, 则可对角化。

常见反例: 有重特征值不一定不可对角化, 要看特征子空间维数。

### 11.13 实对称矩阵题模板

若  $A = A^T$ :

1. 特征值全为实数;
2. 不同特征值的特征向量正交;
3. 一定可正交对角化。

流程:

1. 求特征值;
2. 求各特征子空间;
3. 对每个特征子空间内部做 Schmidt 正交化;
4. 合并得到标准正交特征向量组;
5. 令  $Q$  为这些向量作列, 则

$$Q^T A Q = D.$$

## 11.14 二次型化标准形

方法一：配方法。

适合变量少、交叉项明显的二次型。

方法二：合同初等变换。

对称矩阵  $A$  同时作相同类型的行列变换，相当于求

$$C^TAC.$$

方法三：正交变换。

若  $A$  实对称，可正交对角化：

$$Q^T A Q = D.$$

于是

$$x^T A x = y^T D y.$$

## 11.15 正定判别模板

实对称矩阵  $A$  正定的等价判别：

1.  $x^T A x > 0$  对一切  $x \neq 0$ ;
2. 所有特征值  $> 0$ ;
3. 所有顺序主子式  $> 0$ ;
4. 存在可逆  $P$ , 使  $A = P^T P$ .

二阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

正定当且仅当

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

三阶矩阵用顺序主子式：

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

半正定注意：不能只看顺序主子式非负；常用“所有主子式非负”或“所有特征值非负”。

## 11.16 容易误用的点

1. “向量个数等于维数”不自动推出是基，还需线性无关或能生成。
2. 行变换改变列向量本身，但不改变列向量间线性关系。
3.  $AB = I$  对方阵可推出  $BA = I$ ；非方阵不行。
4. 相似与相抵不同：相似是  $P^{-1}AP$ ，相抵是  $PAQ$ 。
5. 对角化不是只求出特征值，还要有足够多线性无关特征向量。
6. 实对称矩阵一定可正交对角化，一般矩阵不一定。
7. 合同用于二次型，相似用于线性变换。
8. 正定矩阵默认实对称；非对称矩阵讨论  $x^T A x$  时只与其对称部分有关。

## 12 主要定理证明

### 12.1 子空间判别法

设  $W \subseteq V$  且  $W \neq \emptyset$ 。若对任意  $x, y \in W$  与  $\lambda, \mu \in F$  都有

$$\lambda x + \mu y \in W,$$

则取  $\lambda = \mu = 1$  得加法封闭；取  $\mu = 0$  得数乘封闭。又因  $W$  非空，取  $w \in W$ ，由  $0w = 0$  得零元在  $W$  中，由  $(-1)w = -w$  得负元在  $W$  中，所以  $W$  在继承的运算下构成线性空间。

反过来, 若  $W$  是子空间, 则加法和数乘封闭, 故任意  $\lambda x, \mu y \in W$ , 再相加得  $\lambda x + \mu y \in W$ 。

## 12.2 线性包的最小性

记  $L(S)$  为  $S$  中有限个向量的所有线性组合。两个线性组合相加或数乘后仍是线性组合, 所以  $L(S)$  是子空间。显然  $S \subseteq L(S)$ 。

若  $W$  是任意包含  $S$  的子空间, 则  $W$  对线性组合封闭, 所以  $S$  中元素的一切线性组合都属于  $W$ , 即  $L(S) \subseteq W$ 。因此  $L(S)$  是包含  $S$  的最小子空间。

## 12.3 线性相关判别

若有限向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性相关, 则存在不全为 0 的  $k_i$ , 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0.$$

取  $k_i \neq 0$ , 即可写成

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i} \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j,$$

即某个向量可由其余向量线性表示。

反过来, 若

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} c_j \alpha_j,$$

则

$$\alpha_i - \sum_{j \neq i} c_j \alpha_j = 0$$

给出一个不全为 0 的线性关系, 所以向量组线性相关。

## 12.4 替换定理

设  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性无关, 且都可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示。先把  $\beta_1$  写成  $\alpha_i$  的线性组合, 其中至少有一个系数非零。可把对应的  $\alpha_j$  用  $\beta_1$  与其余  $\alpha$  表示, 从而用  $\beta_1$  替换  $\alpha_j$  后, 生成空间不变。

若已经替换了  $\beta_1, \dots, \beta_k$ , 则  $\beta_{k+1}$  可由当前这组生成向量表示。由于  $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$  线性无关, 表达式中必有某个尚未被替换的  $\alpha$  的系数非零, 否则  $\beta_{k+1}$  会由  $\beta_1, \dots, \beta_k$  表示。于是可继续替换。

这个过程最多替换  $n$  次, 因此  $m \leq n$ 。由此推出有限维空间任意两组基元素个数相同。

## 12.5 基的扩充与子空间维数

设  $W \leq V$ ,  $\dim V = n$ 。取  $W$  中一组线性无关向量, 若它还不能生成  $W$ , 就加入一个不在其线性包中的  $W$  中向量, 线性无关性保持。由于  $V$  中任意超过  $n$  个向量必线性相关, 此过程有限终止, 得到  $W$  的一组基, 且元素个数不超过  $n$ 。故  $\dim W \leq \dim V$ 。

若  $\dim W = \dim V$ , 取  $W$  的一组基。它也是  $V$  中含  $n$  个向量的线性无关组, 因此构成  $V$  的基, 于是  $W = V$ 。

## 12.6 维数公式

设  $U, W$  有限维。取  $U \cap W$  的基

$$\gamma_1, \dots, \gamma_r.$$

把它扩充为  $U$  的基

$$\gamma_1, \dots, \gamma_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s,$$

再扩充为  $W$  的基

$$\gamma_1, \dots, \gamma_r, \beta_1, \dots, \beta_t.$$

证明合并向量组

$$\gamma_1, \dots, \gamma_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t$$

是  $U + W$  的基。生成性显然。若有线性关系

$$\sum c_i \gamma_i + \sum a_j \alpha_j + \sum b_k \beta_k = 0,$$

则

$$\sum c_i \gamma_i + \sum a_j \alpha_j = -\sum b_k \beta_k.$$

左边属于  $U$ , 右边属于  $W$ , 所以二者都属于  $U \cap W$ . 由于  $\gamma_i$  是  $U \cap W$  的基, 结合  $U$  的基的线性无关性, 得  $a_j = 0$ ; 再由  $W$  的基的线性无关性, 得  $b_k = 0, c_i = 0$ . 故合并组线性无关.

因此

$$\dim(U + W) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

## 12.7 直和判别

若  $U \cap W = \{0\}$ , 且  $x = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ , 其中  $u_i \in U, w_i \in W$ , 则

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1.$$

左边属于  $U$ , 右边属于  $W$ , 故属于  $U \cap W$ , 只能为  $0$ . 于是  $u_1 = u_2, w_1 = w_2$ , 表示唯一.

反过来, 若表示唯一, 而  $z \in U \cap W$ , 则

$$z = z + 0 = 0 + z$$

是  $U + W$  中同一向量的两种表示, 故  $z = 0$ . 因此  $U \cap W = \{0\}$ .

## 12.8 Cauchy-Schwarz 不等式

若  $y = 0$ , 结论显然. 设  $y \neq 0$ . 对任意  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (y, y)t^2 + 2(x, y)t + (x, x).$$

这是关于  $t$  的二次多项式, 且恒非负, 所以判别式不大于  $0$ :

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0.$$

故

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

等号成立当且仅当该二次式有实根, 即存在  $t$  使  $x + ty = 0$ , 也就是  $x, y$  线性相关.

## 12.9 Schmidt 正交化

设  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性无关. 令  $\beta_1 = \alpha_1$ , 并递推定义

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i.$$

对  $j < k$ , 有

$$(\beta_k, \beta_j) = (\alpha_k, \beta_j) - \frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} (\beta_j, \beta_j) = 0,$$

其他项因归纳假设正交而为  $0$ . 故  $\beta_k$  与前面所有  $\beta_j$  正交.

若某个  $\beta_k = 0$ , 则  $\alpha_k$  是  $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$  的线性组合, 而这些  $\beta_i$  又由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  生成, 导致  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  线性相关, 矛盾. 因此  $\beta_k \neq 0$ . 单位化  $e_k = \beta_k / \|\beta_k\|$  得标准正交组.

## 12.10 秩-零化度定理

设  $T: V \rightarrow W$  线性,  $\dim V < \infty$ . 取  $\ker T$  的基

$$u_1, \dots, u_r,$$

扩充为  $V$  的基

$$u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s.$$

证明  $T(v_1), \dots, T(v_s)$  是  $\text{Im} T$  的基.

生成性: 任意  $x \in V$  可写为

$$x = \sum a_i u_i + \sum b_j v_j,$$

于是

$$T(x) = \sum b_j T(v_j),$$

故这些像生成  $\text{Im} T$ .

线性无关性: 若

$$\sum b_j T(v_j) = 0,$$

则  $T(\sum b_j v_j) = 0$ , 所以  $\sum b_j v_j \in \ker T$ , 可由  $u_i$  表示. 这与扩充后的基线性无关相容只可能  $b_j = 0$ . 因此

$$\dim V = r + s = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T.$$

### 12.11 矩阵表示与基变换公式

设  $T(\alpha_j) = \sum_i a_{ij}\beta_i$ , 矩阵  $A = (a_{ij})$ 。若

$$x = \sum_j x_j \alpha_j,$$

则由线性性

$$T(x) = \sum_j x_j T(\alpha_j) = \sum_j x_j \sum_i a_{ij}\beta_i = \sum_i \left( \sum_j a_{ij}x_j \right) \beta_i.$$

因此  $[T(x)]_\beta = A[x]_\alpha$ 。

若新旧基满足

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P,$$

且  $x = (\alpha)X_\alpha = (\beta)X_\beta$ , 则

$$(\alpha)X_\alpha = (\alpha)PX_\beta.$$

由坐标唯一性得  $X_\alpha = PX_\beta$ , 即  $X_\beta = P^{-1}X_\alpha$ 。线性变换矩阵的相似公式  $B = P^{-1}AP$  随之得到。

### 12.12 可逆矩阵等价条件

设  $A$  为  $n$  阶矩阵。若  $A$  可逆, 则  $Ax = 0$  左乘  $A^{-1}$  得  $x = 0$ , 所以齐次方程只有零解。齐次方程只有零解等价于列向量线性无关, 也等价于  $\operatorname{rank} A = n$ 。秩为  $n$  又等价于列向量构成  $F^n$  的基, 因此对任意  $b$ , 方程  $Ax = b$  有唯一解。

若对任意  $b$  方程  $Ax = b$  有唯一解, 特别地对标准基  $e_i$ , 存在唯一  $x_i$  使  $Ax_i = e_i$ 。令  $B = (x_1, \dots, x_n)$ , 则  $AB = I$ 。方阵左逆右逆一致, 可推出  $BA = I$ , 故  $A$  可逆。又  $\operatorname{rank} A = n$  等价于  $\det A \neq 0$ , 并且也等价于  $A$  可化为  $I$ , 即  $A$  是初等矩阵的乘积。

### 12.13 行列式秩定理

设矩阵秩为  $r$ 。由秩的定义, 可取  $r$  个线性无关列。只看这  $r$  列得到一个列秩为  $r$  的子矩阵, 因此其中必有  $r$  行使对应的  $r \times r$  子矩阵行秩也为  $r$ , 于是得到一个  $r$  阶非零子式。

另一方面, 若存在  $r+1$  阶非零子式, 则该子式的  $r+1$  列线性无关, 从而原矩阵秩至少为  $r+1$ , 矛盾。因此所有  $r+1$  阶子式为 0。所以矩阵秩恰等于非零子式的最高阶数。

### 12.14 Cramer 法则

若  $\det A \neq 0$ , 则  $A$  可逆, 方程  $Ax = b$  有唯一解。由伴随矩阵公式

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

有  $x = A^{-1}b$ 。第  $i$  个分量等于把  $A$  的第  $i$  列替换为  $b$  后按第  $i$  列展开所得行列式除以  $\det A$ , 即

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

### 12.15 不同特征值的特征向量线性无关

对特征值个数归纳。设  $\alpha_i$  属于互异特征值  $\lambda_i$ , 且

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_m\alpha_m = 0.$$

对等式作用  $A$ , 得

$$c_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + c_m\lambda_m\alpha_m = 0.$$

用  $\lambda_m$  乘原等式并相减, 得

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + \dots + c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0.$$

由归纳假设,  $c_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$ , 而  $\lambda_i \neq \lambda_m$ , 故  $c_i = 0$ ,  $i < m$ 。代回原式得  $c_m = 0$ 。故线性无关。

### 12.16 对角化判别

若  $A$  可对角化, 即  $P^{-1}AP = D$ , 设  $P$  的列为  $p_1, \dots, p_n$ ,  $D$  的对角元为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。由

$$AP = PD$$

可得  $Ap_i = \lambda_i p_i$ 。因为  $P$  可逆,  $p_i$  构成一组基, 所以存在一组由特征向量组成的基。

反过来, 若存在特征向量基  $p_1, \dots, p_n$ , 令  $P = (p_1, \dots, p_n)$ , 则  $P$  可逆且

$$AP = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

故

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

## 12.17 实对称矩阵正交对角化

设  $A = A^T$ 。先取单位特征向量  $u$ , 对应实特征值  $\lambda$ 。对任意  $v \perp u$ ,

$$(Av, u) = (v, A^T u) = (v, Au) = \lambda(v, u) = 0,$$

所以  $u^\perp$  在  $A$  下不变。将  $A$  限制在  $u^\perp$  上仍是实对称变换。对维数归纳, 可在  $u^\perp$  中取一组标准正交特征向量。连同  $u$  得到全空间的一组标准正交特征向量。以它们为列组成正交矩阵  $Q$ , 便有

$$Q^T A Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

## 12.18 惯性定理

实二次型经可逆线性替换可化为

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_{p+q}^2.$$

设同一二次型还有另一规范形, 正平方项个数为  $p'$ 。若  $p < p'$ , 取第二个规范形中由正平方变量张成的  $p'$  维子空间。它与第一个规范形中非正平方部分张成的  $n - p$  维子空间维数和大于  $n$ , 故交非零。交中非零向量在第二规范形下取正值, 在第一规范形下取非正值, 矛盾。因此  $p \geq p'$ 。交换两种规范形得  $p' \geq p$ , 故  $p = p'$ 。负惯性指数同理唯一。

## 12.19 正定判别

对实对称矩阵  $A$ , 由正交对角化, 存在正交  $Q$ , 使

$$Q^T A Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

令  $x = Qy$ , 则

$$x^T A x = y^T Q^T A Q y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

因此  $A$  正定当且仅当所有  $\lambda_i > 0$ 。

若  $A = P^T P$  且  $P$  可逆, 则

$$x^T A x = x^T P^T P x = \|Px\|^2 > 0 \quad (x \neq 0),$$

所以  $A$  正定。反过来, 若  $A$  正定, 正交对角化后令

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_i), \quad D^{1/2} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_i}),$$

则

$$A = Q D Q^T = (D^{1/2} Q^T)^T (D^{1/2} Q^T),$$

得到  $A = P^T P$ 。

顺序主子式判别可由配方法或 Gaussian 消元得到: 正定二次型逐步配方时每一步的主元都必须为正, 而这些主元的乘积正是顺序主子式之比。因此所有顺序主子式为正当且仅当  $A$  正定。