数学分析 I 复习提纲

> 来源：数分I复习.pdf。
> 参考校订：数学分析 上.pdf、《数学分析》辅导.pdf。
> 本文件按复习页内容整理为考前提纲，公式已按标准表述校正。

1 1. 实数完备性与确界

1.1 确界原理

非空有上界数集必有上确界；非空有下界数集必有下确界。

等价完备性命题：

- 单调有界定理；
- 区间套定理；
- Bolzano-Weierstrass 聚点定理；
- Heine-Borel 有限覆盖定理；
- Cauchy 收敛准则。

2 2. 数列极限

2.1 定义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

2.2 基本性质

收敛数列具有：

- 极限唯一性；
- 有界性；
- 保号性；
- 保序性；
- 夹逼定理；
- 四则运算法则。

落在任意邻域 $U(A,\varepsilon)$ 外的项只有有限项。

2.3 子列判别

数列收敛于 A，当且仅当它的任意子列都收敛于 A。

若两个子列极限不同，则原数列发散。

2.4 单调有界定理

单调且有界的数列必收敛。

2.5 Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛，当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m, n > N,\quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

2.6 Stolz 定理

若 b_n 严格递增且 $b_n \to +\infty$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

使用时先确认 b_n 的单调性和趋于 $+\infty$；它本质上是“差商极限推出商极限”。

3 3. 函数极限

3.1 ε-δ 定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

无穷远处极限：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\quad x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

3.2 Heine 归结原则

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 当且仅当对任意满足 $x_n \neq x_0$ 且 $x_n \to x_0$ 的数列，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

3.3 Cauchy 准则

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\quad 0 < |x_1 - x_0| < \delta,\ 0 < |x_2 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

3.4 无穷小、无穷大与渐近线

- $f(x) \to 0$ 称为无穷小；
- $|f(x)| \to +\infty$ 称为无穷大；
- 若

  $$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - (kx + b) \right] = 0,$$

  则 $y = kx + b$ 为斜渐近线。

4 4. 连续函数

4.1 连续定义

f 在 x_0 连续，当且仅当

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

等价地：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

4.2 间断点分类

1. 可去间断点：左右极限相等且有限，但函数值缺失或不等于该极限；
2. 跳跃间断点：左右极限均存在且有限，但不相等；
3. 第二类间断点：至少一个单侧极限不存在或为无穷。

若函数仅有有限个第一类间断点，常称为分段连续函数。

4.3 闭区间连续函数性质

若 $f \in C[a,b]$，则：

- 有界性定理；
- 最大最小值定理；
- 零点存在定理；
- 介值定理；
- 一致连续性定理。

4.4 一致连续

f 在 D 上一致连续，当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad x, y \in D,\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

闭区间上连续函数必一致连续。

若 f 在 (a,b) 连续，则常用判别：若 $f(a+)$ 与 $f(b-)$ 均存在且有限，则 f 在 (a,b) 上一致连续。

常见充分条件：

- Lipschitz 条件；
- 导数有界；
- Cantor 定理，即闭区间连续推出一致连续。

5 5. 导数与微分

5.1 导数

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

可导必连续，连续未必可导。

5.2 费马定理

若 f 在 x_0 可导，且 x_0 是局部极值点，则

$$f'(x_0) = 0.$$

5.3 微分

f 在 x_0 可微，当且仅当

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

此时

$$A = f'(x_0), \qquad dy = f'(x_0)\,dx.$$

6 6. 微分中值定理

6.1 Rolle 定理

若 $f \in C[a,b]$，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f^{'}(\xi)=0.$$

6.2 Lagrange 中值定理

若 $f \in C[a,b]$，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f^{'}(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

6.3 Cauchy 中值定理

若 $f,g \in C[a,b]$，在 (a,b) 可导，且 $g^{'}(x)\neq 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}.$$

6.4 Darboux 定理

导函数具有介值性。即若 f 在区间上可导，则 $f^{'}$ 虽不一定连续，但不能有跳跃间断。

7 7. L'Hospital 法则与 Taylor 公式

7.1 L'Hospital 法则

若 f,g 在 x_0 的去心邻域内可导，$g^{'}(x)\neq 0$，并且属于 $0/0$ 或 ∞/∞ 型，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=L,$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

在相应条件下成立。

洛必达法则必须先判定未定式；若原极限不是 $0/0$ 或 ∞/∞ 型，应先化简或使用其他极限法则。

7.2 Taylor 公式

Peano 余项：若 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\big((x-x_0)^n\big).$$

Lagrange 余项：若 f 在 x_0 与 x 间有 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

常用展开：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

8 8. 极值、单调性与凸性

8.1 极值判别

一阶充分条件：若 $f^{'}$ 在 x_0 两侧变号，则 x_0 为极值点。

二阶充分条件：若

$$f^{'}(x_0) = 0, \qquad f^{''}(x_0) > 0,$$

则 x_0 为局部极小点；若 $f^{''}(x_0) < 0$，则为局部极大点。

8.2 单调性

若 $f^{'}(x) \geq 0$，则 f 单调不减；若 $f^{'}(x) > 0$，则 f 严格递增。

8.3 凸函数

f 在区间 I 上为凸函数，当且仅当对任意 $x, y \in I$ 与 $\lambda \in [0, 1]$，

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

若 f 二阶可导，则

$$f^{''}(x) \geq 0$$

是凸函数的充要条件。

Jensen 不等式：若 f 凸，$\lambda_i \geq 0$，$\sum \lambda_i = 1$，则

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

9 9. 不定积分

若 $F^{'}(x) = f(x)$，则 F 是 f 的原函数，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

常用方法：

- 第一换元法；
- 第二换元法；
- 分部积分：

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

常见积分：

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C.$$

10 10. 定积分

10.1 Riemann 可积

设 f 在 $[a, b]$ 有界。若当分割细度 $|T| \to 0$ 时，任意积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

极限存在且与分割和取点无关，则 f 在 $[a, b]$ 可积。

记作

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

可积条件：

- 连续函数可积；
- 单调函数可积；
- 有界且仅有限个间断点的函数可积；
- 可积函数必有界。

Darboux 判别常用形式：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T,\quad U(T) - L(T) < \varepsilon.$$

10.2 Newton-Leibniz 公式

若 $f \in C[a,b]$，且 $F' = f$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

10.3 积分中值定理

若 $f, g \in C[a,b]$ 且 g 不变号，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

10.4 变上限积分

若 f 在 $[a,b]$ 上可积，定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

则 F 连续；若 f 在 x 连续，则

$$F'(x) = f(x).$$

11 11. 定积分应用

面积：

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

或两曲线之间

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

参数曲线弧长： 若

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad t \in [\alpha, \beta],$$

则

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt.$$

旋转体体积常用：

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

12 12. 反常积分

12.1 无穷区间积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx.$$

若极限存在且有限，则称收敛。

12.2 瑕积分

若 f 在 a 附近无界，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

12.3 Cauchy 收敛准则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛，当且仅当

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A,\ \forall A_1,A_2>A,\quad \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

12.4 判别法

比较判别：若 $0\le f(x)\le g(x)$，且 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛。

绝对收敛：若

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

收敛，则

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

收敛。

Dirichlet 判别：若

$$F(A)=\int_a^A f(x)\,dx$$

有界，$g(x)$ 单调且 $g(x)\to 0$，则

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

收敛。

Abel 判别：若 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛，$g(x)$ 单调有界，则

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

收敛。