数学分析 I

1 实数、确界与函数

1.1 实数集的基本性质

实数集 $\mathbb{R}$ 的常用性质：

1. **有序性**：任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 可比较大小。
2. **传递性**：若 $a > b$，$b > c$，则 $a > c$。
3. **阿基米德性**：若 $a > 0$，$b \in \mathbb{R}$，则存在 $n \in \mathbb{N}$，使
$$na > b.$$
4. **稠密性**：任意两个不同实数之间都有有理数，也都有无理数。
5. **数轴对应**：实数与数轴上的点一一对应。
6. **完备性**：用确界原理、区间套定理、单调有界定理等形式表达。

补充：

- $\mathbb{Q}$ 与无理数集在 $\mathbb{R}$ 中都稠密。
- "若对任意 $\varepsilon > 0$，$|a-b| < \varepsilon$，则 $a = b$"是常用证明技巧。

1.2 邻域

点 a 的 δ 邻域：
$$U(a,\delta) = \{x: |x-a| < \delta\}.$$

空心邻域：
$$U^{\circ}(a,\delta) = \{x: 0 < |x-a| < \delta\}.$$

左右邻域：
$$U_{+}(a,\delta) = (a, a+\delta), \qquad U_{-}(a,\delta) = (a-\delta, a).$$

无穷远邻域：
$$U(+\infty) = \{x: x > M\}, \qquad U(-\infty) = \{x: x < -M\}.$$

1.3 上界、下界、确界

设 $S \subset \mathbb{R}$，$S \neq \varnothing$。

若存在 M，使对一切 $x \in S$ 有 $x \leq M$，则称 S 有上界，M 是上界。下界类似。

$\alpha = \sup S$ 当且仅当：

1. 对一切 $x \in S$，有 $x \leq \alpha$；
2. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x_{\varepsilon} \in S$，使
$$\alpha - \varepsilon < x_{\varepsilon} \leq \alpha.$$

$\beta = \inf S$ 当且仅当：

1. 对一切 $x \in S$，有 $\beta \leq x$；
2. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x_{\varepsilon} \in S$，使
$$\beta \leq x_{\varepsilon} < \beta + \varepsilon.$$

1.4 确界原理

非空有上界数集必有上确界；非空有下界数集必有下确界。

例题类型：

1. 证明 $\mathbb{N}^+$ 有下界但无上界。
2. 若 A, B 非空且对任意 $x \in A, y \in B$ 有 $x \le y$，则
$$\sup A \le \inf B.$$
若还满足分割条件，可得到 $\sup A = \inf B$。
3. 若 S 有最大元，则 $\sup S = \max S$。
4. 若 S 无上界，记 $\sup S = +\infty$；若无下界，记 $\inf S = -\infty$。

1.5 函数与函数有界性

若 $X, Y \subseteq \mathbb{R}$，映射
$$f: X \to Y$$
称为定义在 X 上、取值于 Y 的函数。

函数有界：
$$\exists M > 0,\ \forall x \in D,\quad |f(x)| \le M.$$

上无界：
$$\forall M > 0,\ \exists x \in D,\quad f(x) > M.$$

常见例子：

- Dirichlet 函数
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
- 分段函数与符号函数 $\operatorname{sgn} x$，后面用于讨论极限与连续。

1.6 本章例题

例 1：证明 $\mathbb{N}^+$ 有下界但无上界。

解：对任意 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $n \ge 1$，所以 1 是下界。若存在上界 M，由阿基米德性可取 $n \in \mathbb{N}^+$ 使 $n > M$，矛盾。因此 $\mathbb{N}^+$ 无上界。

例 2：设 A, B 非空，且对任意 $x \in A, y \in B$ 有 $x \le y$。证明
$$\sup A \le \inf B.$$

解：任取 $y \in B$，由条件知 y 是 A 的上界，所以 $\sup A \le y$。于是 $\sup A$ 是 B 的下界，故 $\sup A \le \inf B$。

例 3：若 S 有最大元 m，证明 $\sup S = m$。

解：对任意 $x \in S$ 有 $x \le m$，所以 m 是上界。又 $m \in S$，任何小于 m 的数都不是上界，因此 m 是最小上界。

2 数列极限

2.1 数列与极限定义

数列是定义在正整数集上的函数：
$$a: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},\qquad n \mapsto a_n.$$

极限定义：
$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$
当且仅当
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

否定形式：
$$a_n \nrightarrow a$$
当且仅当
$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall N,\ \exists n > N,\quad |a_n - a| \ge \varepsilon_0.$$

发散：
$$\forall a \in \mathbb{R},\quad a_n \nrightarrow a.$$

2.2 极限证明模板

证明 $a_n \to a$ 的标准步骤：

1. 估计 $|a_n - a|$；
2. 将其放缩为某个关于 n 的简单表达式；
3. 给定 $\varepsilon > 0$，反解出 $n > N(\varepsilon)$；
4. 取合适 N。

- 证明 $\frac{1}{n} \to 0$： 给定 $\varepsilon > 0$，取 $N > \frac{1}{\varepsilon}$，则 $n > N$ 时
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$
- 证明 $\sqrt[n]{a} \to 1$（$a > 0$）：可用对数或 Bernoulli 不等式。
- 证明含根式、有理式的数列极限：先有理化或同除最高阶。

2.3 收敛数列的性质

2.3.1 唯一性

若 $a_n \to a$ 且 $a_n \to b$，则 $a = b$。

证明：给定 $\varepsilon > 0$，取 N 使
$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad |a_n - b| < \varepsilon.$$
则
$$|a - b| \le |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$
由 ε 任意得 $a = b$。

2.3.2 有界性

收敛数列必有界。

证明：取 $\varepsilon = 1$，从某项起 $|a_n - a| < 1$，前面有限项取最大值即可。

2.3.3 保号性

若 $a_n \to a > 0$，则从某项起 $a_n > 0$。取 $\varepsilon = a/2$。

2.3.4 保序性

若 $a_n \to a$，$b_n \to b$，且从某项起 $a_n \le b_n$，则
$$a \le b.$$

2.3.5 夹逼定理

若
$$a_n \le c_n \le b_n, \qquad a_n \to A, \quad b_n \to A,$$
则
$$c_n \to A.$$

2.3.6 四则运算

若 $a_n \to a$，$b_n \to b$，则
$$a_n \pm b_n \to a \pm b, \qquad a_n b_n \to ab.$$
若 $b \ne 0$ 且 $b_n \ne 0$ 从某项起成立，则
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

2.4 子列

设 $n_1 < n_2 < \cdots$，则 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列。

定理：

$$a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意子列 } a_{n_k} \to a.$$

推论：

- 若存在两个子列极限不同，则原数列发散。
- 若所有子列都有同一极限，则原数列收敛。

例子：

- $a_n = (-1)^n$ 有子列 $a_{2k} = 1$ 与 $a_{2k-1} = -1$，故发散。
- 若 $a_{2n} \to a$，$a_{2n-1} \to a$，则 $a_n \to a$。

2.5 单调有界定理

单调递增且有上界的数列必收敛，且

$$\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

单调递减且有下界的数列必收敛，且极限为下确界。

证明：令 $\alpha = \sup\{a_n\}$。由上确界定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使

$$\alpha - \varepsilon < a_N \le \alpha.$$

单调递增给出 $n > N$ 时

$$\alpha - \varepsilon < a_N \le a_n \le \alpha,$$

故 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$。

2.6 致密性定理与 Cauchy 收敛准则

致密性定理：任意有界数列必存在收敛子列。

Cauchy 收敛准则：

$$\{a_n\} \text{ 收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m, n > N,\ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

证明：

- 收敛推出 Cauchy：用三角不等式。
- Cauchy 推出收敛：先证明有界，再由致密性定理取收敛子列，最后用 Cauchy 性把全数列拉到同一极限。

2.7 Stolz 定理与常用极限

Stolz 定理：设 b_n 严格递增且 $b_n \to +\infty$。若极限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L,$$

存在于扩充实数意义下，则

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

常见应用：

- 算术平均：若 $a_n \to a$，则
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$
- 幂平均与根式极限。
- $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 的比较。

若 $a_n > 0$ 且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l,$$

其中 $0 \le l < +\infty$，则

$$\sqrt[n]{a_n} \to l.$$

2.8 本章例题

例 1：证明 $\frac{1}{n} \to 0$。

解：给定 $\varepsilon > 0$，取 $N > 1/\varepsilon$。当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

例 2：证明 $\sqrt[n]{a} \to 1$，其中 $a > 0$。

解：若 $a > 1$，令 $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$。由 Bernoulli 不等式，

$$a = (1 + b_n)^n \ge 1 + nb_n,$$

故

$$0 < b_n \le \frac{a-1}{n} \to 0.$$

若 $0 < a < 1$，对 $1/a$ 使用上面的结论，再取倒数即可。

例 3：证明 $a_n = (-1)^n$ 发散。

解：$a_{2n} = 1$，$a_{2n-1} = -1$，两个子列极限不同，所以原数列发散。

例 4：若 $a_n \to a$，证明

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$

解：令 $s_n = a_1 + \cdots + a_n$。由 Stolz 定理，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

例 5：设

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad x_1 > 0,\ a > 0.$$

证明 $x_n \to \sqrt{a}$。

解：由 AM-GM 知 $x_{n+1} \ge \sqrt{a}$。当 $n \ge 2$ 时，

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \le 0.$$

故 $\{x_n\}_{n \ge 2}$ 单调递减且有下界，因而收敛。设极限为 $L > 0$，代入递推式得

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right),$$

所以 $L = \sqrt{a}$。

3 函数极限

3.1 函数极限定义

若 f 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

左右极限：

$$\lim_{x \to x_0+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

双侧极限存在当且仅当左右极限存在且相等。

无穷远处极限：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists M,\ x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

3.2 极限与函数在点处取值无关

函数极限只依赖于去心邻域中的函数值，与 $f(x_0)$ 是否定义、取什么值无关。

例子：

- $\operatorname{sgn} x$ 在 0 处左右极限不同，双侧极限不存在。
- $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x \to 0$ 时不存在极限，可取
$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}, \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + 3\pi/2}$$
得到函数值分别趋向 1 与 −1。

3.3 Heine 归结原则

设 f 在 x_0 的某个去心邻域内有定义。则
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$
当且仅当对任意 x_n 满足 $x_n \neq x_0$ 且 $x_n \to x_0$，都有
$$f(x_n) \to A.$$

用途：

1. 证明极限存在：转化为任意数列。
2. 证明极限不存在：找两条趋向同一点的数列，使函数值极限不同。

3.4 Cauchy 准则

函数极限存在当且仅当：
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$$
只要 $x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$，就有
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

3.5 两个重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

常用推论：

$$\sin x \sim x, \qquad \tan x \sim x, \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

第二重要极限：
$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e,$$
也可写为
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3.6 无穷小、无穷大与等价

无穷小：
$$\alpha(x) \to 0.$$

无穷大：
$$|\beta(x)| \to +\infty.$$

若
$$\frac{\alpha}{\beta} \to 1,$$

则
$$\alpha \sim \beta.$$

常用等价无穷小:

$$\sin x \sim x,\quad \tan x \sim x,\quad \ln(1+x) \sim x,\quad e^x - 1 \sim x,$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

3.7 渐近线

垂直渐近线：若

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

则 $x = x_0$ 为垂直渐近线。

水平渐近线：若

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

则 $y = b$ 为水平渐近线。

斜渐近线：若存在 k, b，使

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx - b\big) = 0,$$

则 $y = kx + b$ 为斜渐近线，其中

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},\qquad b = \lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx\big).$$

3.8 本章例题

例 1：讨论 $\mathrm{sgn}x$ 在 0 处的极限。

解：$x \to 0+$ 时函数值为 1，$x \to 0-$ 时函数值为 -1。左右极限不同，所以双侧极限不存在。

例 2：证明 $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在。

解：取

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2},\qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + 3\pi/2}.$$

则 $x_n, y_n \to 0$，但

$$\sin\frac{1}{x_n} = 1,\qquad \sin\frac{1}{y_n} = -1.$$

由 Heine 归结原则，极限不存在。

例 3：求

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

解：由 $1 - \cos x \sim x^2/2$，极限为 $1/2$。

例 4：求曲线

$$y = x + \frac{1}{x}$$

当 $x \to +\infty$ 时的斜渐近线。

解:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 1,\qquad b = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = 0.$$

故斜渐近线为 $y = x$。

4 连续函数

4.1 连续定义

f 在 x_0 连续，当且仅当:

1. $f(x_0)$ 有定义；

2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在；
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。

等价 ε-δ 形式：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

4.2 间断点分类

1. **可去间断点**：极限存在，但函数值缺失或不等于极限。
2. **跳跃间断点**：左右极限存在且有限，但不相等。
3. **第二类间断点**：至少一个单侧极限不存在或为无穷。

例子：

- $\operatorname{sgn} x$ 在 0 处是跳跃间断点。
- $\sin\frac{1}{x}$ 在 0 处是第二类间断点。
- 改变一点函数值，只会产生或消除可去间断点。

4.3 连续函数运算

若 f, g 在 x_0 连续，则

$$f \pm g, \quad fg$$

在 x_0 连续；若 $g(x_0) \neq 0$，则

$$\frac{f}{g}$$

在 x_0 连续。

若 g 在 x_0 连续，f 在 $g(x_0)$ 连续，则 $f \circ g$ 在 x_0 连续。

初等函数在其定义域内连续。

4.4 闭区间连续函数性质

有界性定理：若 $f \in C[a,b]$，则 f 有界。

最值定理：若 $f \in C[a,b]$，则存在 $\xi, \eta \in [a,b]$，使

$$f(\xi) = \max f, \qquad f(\eta) = \min f.$$

零点定理：若 $f \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(\xi) = 0.$$

介值定理：若 $f \in C[a,b]$，则 f 取遍 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值。

证明：

- 有界性与最值定理常用致密性定理反证。
- 零点定理可用区间套或确界法。
- 介值定理可转化为零点定理，令 $g(x) = f(x) - C$。

4.5 一致连续

f 在 D 上一致连续：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad x, y \in D,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

与逐点连续的区别：一致连续中的 δ 只依赖 ε，不依赖具体点。

Cantor 定理：若 $f \in C[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续。

常用判别：

- Lipschitz 条件推出一致连续；
- 若 $f^{'}$ 在区间上有界，则 f 在该区间上一致连续；
- 在有限开区间 (a,b) 上，若 $f(a+)$、$f(b-)$ 存在且有限，通常可延拓到闭区间，从而一致连续。

例子：

- $f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续。
- $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续但不一致连续。

4.6 反函数连续性

若 f 在区间 I 上严格单调且连续，则反函数 f^{-1} 在 $f(I)$ 上连续，且单调性与 f 相同。

证明：用介值性和严格单调性证明反函数的邻域控制。

4.7 本章例题

例 1：讨论

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 0 处的连续性。

解：因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq f(0),$$

所以 f 在 0 处不连续，且是可去间断点。

例 2：证明 $f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续。

解：取

$$x_n=\frac{1}{n},\qquad y_n=\frac{1}{n+1}.$$

则 $|x_n-y_n|\to 0$，但

$$|f(x_n)-f(y_n)|=1.$$

故不一致连续。

例 3：证明 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续但不一致连续。

解：取 $x_n=n$，$y_n=n+1/n$。则 $|x_n-y_n|\to 0$，但

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|n^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right|=2+\frac{1}{n^2}\nrightarrow 0.$$

5 导数与微分

5.1 导数定义

$$f^{'}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

等价写法：

$$f^{'}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

左右导数：

$$f^{'}_{+}(x_0),\qquad f^{'}_{-}(x_0).$$

可导当且仅当左右导数存在且相等。

可导必连续，连续不一定可导。

例子：

- $f(x)=|x|$ 在 0 处连续但不可导；
- 分段函数在分界点处需要分别检查连续性、左右导数。

5.2 求导法则

$$\begin{aligned}(u\pm v)' &= u'\pm v',\\ (uv)' &= u'v+uv',\\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v-uv'}{v^2}.\end{aligned}$$

复合函数：

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

反函数：若 f 在 x_0 的邻域内连续严格单调、可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，令 $y_0=f(x_0)$，则

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

参数方程：若 $x=x(t)$，$y=y(t)$，且 $x'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

5.3 高阶导数

递推定义：

$$f^{(n)}=(f^{(n-1)})'.$$

Leibniz 公式：

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

5.4 微分

f 在 x_0 可微，当且仅当

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

此时 $A=f'(x_0)$，并记

$$dy=f'(x_0)\,dx.$$

可微与可导等价（一元函数情形）。

微分法则：

$$\begin{aligned}d(u\pm v)&=du\pm dv,\\ d(uv)&=u\,dv+v\,du,\\ d\left(\frac{u}{v}\right)&=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.\end{aligned}$$

5.5 本章例题

例 1：证明 $f(x)=|x|$ 在 0 处不可导。

解：

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}.$$

当 $h\to 0+$ 时极限为 1，当 $h\to 0-$ 时极限为 -1，左右导数不同。

例 2：求 $y=\arctan x$ 的导数。

解：令 $x=\tan y$，则

$$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2.$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

例 3：设 $x = t^2$，$y = t^3$。当 $t \neq 0$ 时求 dy/dx。

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t.$$

例 4：求 $(x^2e^x)^{'}$。

解：

$$(x^2e^x)^{'} = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x.$$

6 微分中值定理、Taylor 公式与凸性

6.1 Fermat 定理

若 f 在 x_0 可导，且 x_0 是局部极值点，则

$$f^{'}(x_0) = 0.$$

注意：$f^{'}(x_0) = 0$ 只是极值的必要条件，不是充分条件。

6.2 Rolle 定理

若 $f \in C[a,b]$，在 (a,b) 可导，且 $f(a) = f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f^{'}(\xi) = 0.$$

6.3 Lagrange 中值定理

若 $f \in C[a,b]$，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(b) - f(a) = f^{'}(\xi)(b-a).$$

推论：

- 若 $f^{'} = 0$，则 f 为常数；
- 若 $f^{'} > 0$，则 f 严格递增；
- 若 $f^{'} < 0$，则 f 严格递减；
- 若 $f^{'} \geq 0$，则 f 单调不减。

6.4 Darboux 定理

导函数具有介值性。也就是说，导函数即使不连续，也不能有跳跃间断。

6.5 Cauchy 中值定理

若 $f, g \in C[a,b]$，在 (a,b) 可导，且 $g^{'}(x) \neq 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}.$$

6.6 L'Hospital 法则

对 $0/0$ 或 ∞/∞ 型，若 f, g 在相应去心邻域内可导，$g^{'} \neq 0$，且

$$\lim \frac{f^{'}}{g^{'}} = L,$$

同时分母 g 在去心邻域内不为 0，则在常用的洛必达条件下

$$\lim \frac{f}{g} = L.$$

使用流程：

1. 先判定是否为未定式；
2. 检查 $g' \neq 0$；
3. 求导后极限存在；
4. 必要时可多次使用，但每次都要重新检查未定式。

6.7 Taylor 公式

Peano 余项：若 f 在 x_0 处存在 n 阶导数，则
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Lagrange 余项：若 f 在 x_0 与 x 之间有相应的 $n+1$ 阶导数，则存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ，使
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

常用 Maclaurin 展开：

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots.
\end{aligned}$$

6.8 极值判别

第一充分条件：若 f' 在 x_0 两侧变号，则 x_0 为极值点。

第二充分条件：若
$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) > 0,$$
则 x_0 为极小值点；若 $f''(x_0) < 0$，则为极大值点。

高阶判别：若
$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$
则 n 偶时有极值，n 奇时无极值。

6.9 凸函数

定义：
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

可导判别：若 f 在区间内可导，则 f 凸当且仅当图像在任一点切线之上：
$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x).$$

二阶判别：若 f 在区间内二阶可导，则
$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ 凸}.$$

Jensen 不等式：若 f 凸，$\lambda_i \geq 0$，$\sum \lambda_i = 1$，则
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

拐点：若曲线在 x_0 两侧凹凸性发生改变，则 x_0 为拐点候选。若 f'' 在 x_0 两侧变号，通常可判定为拐点。

6.10 本章例题

例 1：证明 $x > 0$ 时 $\ln(1+x) < x$。

解：令 $f(x) = x - \ln(1+x)$，则

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0.$$

又 $f(0) = 0$，所以 $x > 0$ 时 $f(x) > 0$。

例 2：证明 $x > 0$ 时 $\sin x < x$。

解：令 $f(x) = x - \sin x$。则

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \qquad f(0) = 0.$$

故 $f(x) \geq 0$。当 $x > 0$ 时不恒等取零，因此 $\sin x < x$。

例 3：求

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

解：由

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

得极限为 1/2。

例 4：求

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

解：由

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

得极限为 1/3。

例 5：讨论 $f(x) = x^3$ 在 0 处是否有极值。

解：虽然 $f'(0) = 0$，但 $f'(x) = 3x^2 \geq 0$，函数在 0 两侧均单调不减，没有极大或极小。

7　实数完备性几个定理

7.1　区间套定理

若

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots,$$

且

$$b_n - a_n \to 0,$$

则存在唯一 ξ，使

$$\xi \in [a_n, b_n] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

7.2　聚点定理

点 ξ 是点集 S 的聚点，若任意邻域内都含有 S 中异于 ξ 的点。

等价表述： 存在 S 中互异点列 x_n，使

$$x_n \to \xi.$$

Weierstrass 聚点定理： 有界无限点集必有聚点。

7.3　Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间 $[a, b]$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖。

证明通常使用区间套定理反证。

7.4 本章例题

例 1：设

$$I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

求这个区间套确定的点。

解：$I_1 \supset I_2 \supset \cdots$，且长度 $1/n \to 0$。公共点唯一，为 0。

例 2：求

$$S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

的聚点。

解：0 的任意邻域中都有足够大的 $1/n$，故 0 是聚点。其他点附近只能含有限个 S 中的点，不是聚点。

例 3：说明 $(0, 1)$ 的开覆盖不一定有有限子覆盖。

解：取

$$\mathcal{U} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : n = 2, 3, \dots\right\}.$$

它覆盖 $(0, 1)$。任取有限多个，其中最小左端点为 $1/N$，则 $(0, 1/N]$ 未被覆盖。

8 不定积分

8.1 原函数与不定积分

若 $F' = f$，则 F 是 f 的原函数。

不定积分：

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

若 F, G 都是 f 的原函数，则 $F - G$ 为常数。

几何意义： 不定积分代表积分曲线族，曲线之间相差一个竖直平移。

8.2 基本积分表

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C, \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C.$$

8.3 换元积分法

第一换元法：

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \qquad u = \varphi(x).$$

第二换元法： 令 $x = \varphi(t)$，则

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

8.4 分部积分法

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

常见应用：

- $\int xe^x dx$；
- $\int x\sin x dx$；
- $\int \ln x dx$；
- $\int \arctan x dx$；
- $\int \sin^m x\cos^n x dx$ 的递推。

8.5 本章例题

例 1：求

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

解：令 $u = 1 + x^2$，则

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(1+x^2) + C.$$

例 2：求 $\int \ln x\,dx$，其中 $x > 0$。

解：令 $u = \ln x$，$dv = dx$，则

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C.$$

例 3：求

$$\int \sin^2 x\,dx.$$

解：由

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

得

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

9 定积分

9.1 Riemann 积分定义

分割：

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

小区间长度：

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

积分和：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

若当 $|T| \to 0$ 时积分和极限存在且与分割、取点无关，则 f 可积，记作

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

9.2 可积必要条件与 Darboux 判别

可积函数必有界。

Darboux 上下和：

$$U(T) = \sum M_i \Delta x_i, \qquad L(T) = \sum m_i \Delta x_i.$$

可积充要条件：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T, \quad U(T) - L(T) < \varepsilon.$$

常见充分条件：

1. 连续函数可积；
2. 单调函数可积；
3. 有界且仅有限个间断点的函数可积。

例子：

- Dirichlet 函数不可积；
- Riemann 函数类型可积性讨论；
- 单调函数可积证明：利用上、下和差估计。

9.3 定积分性质

线性：

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

区间可加：

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

保序：若 $f \le g$，则

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

绝对值不等式：

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|.$$

9.4 积分中值定理

第一积分中值定理：若 $f \in C[a,b]$，g 可积且不变号，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx.$$

特别地：

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a).$$

9.5 微积分基本定理

若 f 可积，定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

则 F 连续。若 f 在 x 处连续，则

$$F'(x) = f(x).$$

若 $f \in C[a,b]$，$\Phi' = f$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

- 求 $F(x) = \int_a^x \sin t^2\,dt$ 的导数；
- 求

  $$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

  的导数：

  $$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

9.6 定积分换元与分部积分

换元：

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

分部积分：

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

9.7 积分第二中值定理

若 f 单调，g 可积，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

推论：若 f 单调递减、非负，且 $f(b) = 0$，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx.$$

一般情形应使用上一条含 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的完整公式。

9.8 本章例题

例 1：求 $F'(x)$，其中

$$F(x) = \int_a^x \sin t^2\,dt.$$

解：由微积分基本定理，

$$F'(x) = \sin x^2.$$

例 2：设

$$F(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^{-t^2}\,dt.$$

求 $F'(x)$。

解：

$$F'(x) = e^{-\sin^2 x}\cos x - 2xe^{-x^4}.$$

例 3：求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

解：这是 $f(x) = x^2$ 在 $[0,1]$ 上的 Riemann 和，故极限为

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

例 4：计算

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx.$$

解：分部积分得

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi.$$

10 定积分的应用

10.1 面积

曲边梯形面积：

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (f \geq 0).$$

两曲线之间面积：

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

极坐标面积：

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,d\theta.$$

10.2 体积

截面面积法：

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

旋转体体积：

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

10.3 弧长

显函数：

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

参数方程：

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

时

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

极坐标：

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

10.4 本章例题

例 1：求曲线 $y = x^2$ 与 $y = x$ 围成的面积。

解：交点为 $0, 1$。在 $[0, 1]$ 上 $x \geq x^2$，故

$$S = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}.$$

例 2：求极坐标曲线 $r = a$，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ 围成的面积。

解：

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\, d\theta = \pi a^2.$$

例 3：求 $y = x^2$，$0 \le x \le 1$ 绕 x 轴旋转所得旋转体体积。

解：

$$V = \pi \int_0^1 x^4\, dx = \frac{\pi}{5}.$$

例 4：求参数曲线 $x = t$，$y = t^2$，$0 \le t \le 1$ 的弧长。

解：

$$s = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\; dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\; dt.$$

11 反常积分

11.1 无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\, dx.$$

若极限存在且有限，则收敛；否则发散。

Cauchy 准则：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A,\ \forall A_1, A_2 > A, \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

11.2 瑕积分

若 f 在 a 附近无界，则

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx.$$

11.3 比较判别

若 $0 \le f \le g$：

- $\int g$ 收敛推出 $\int f$ 收敛；
- $\int f$ 发散推出 $\int g$ 发散。

极限比较：若

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \qquad 0 < c < +\infty,$$

则二者同敛散。

11.4 绝对收敛与条件收敛

若

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

收敛，则 $\int_a^\infty f(x)\, dx$ 绝对收敛。

绝对收敛必收敛；收敛但不绝对收敛称条件收敛。

11.5 Dirichlet 与 Abel 判别法

Dirichlet 判别：若

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$$

有界，$g(x)$ 单调且 $g(x) \to 0$，则

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

收敛。

Abel 判别：若 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛，g 单调有界，则

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

收敛。

11.6 本章例题

例 1：讨论

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

的敛散性。

解：当 $p \neq 1$ 时，

$$\int_1^A x^{-p}\,dx = \frac{A^{1-p} - 1}{1-p}.$$

令 $A \to \infty$，可知收敛当且仅当 $p > 1$。$p = 1$ 时为 $\ln A$，发散。

例 2：讨论

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

的敛散性。

解：当 $p \neq 1$ 时，

$$\int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \frac{1 - \varepsilon^{1-p}}{1-p}.$$

令 $\varepsilon \to 0+$，可知收敛当且仅当 $p < 1$。$p = 1$ 时发散。

例 3：证明

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

收敛但不绝对收敛。

解：$\int_1^A \sin x\,dx$ 有界，$1/x$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知积分收敛。另一方面，$|\sin x|/x$ 在每个长度为 π 的区间上有与 $1/x$ 同阶的正贡献，可与调和级数比较，故绝对积分发散。

12 证明与计算模板

这一部分把分散出现的证明套路集中起来，适合考前按题型复习。

12.1 ε-N 证明模板

目标：证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

步骤：

1. 从 $|a_n - A|$ 出发；

2. 用不等式放缩到容易控制的形式，例如

$$|a_n - A| \le \frac{C}{n},\quad |a_n - A| \le \frac{C}{n^p},\quad |a_n - A| \le Cq^n\ (0 < q < 1).$$

3. 给定 $\varepsilon > 0$，反解 N;
4. 写出“当 $n > N$ 时”结论。

典型例 1： 证明

$$\frac{2n+1}{n+3} \to 2.$$

解：

$$\left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{-5}{n+3}\right| \le \frac{5}{n}.$$

给定 $\varepsilon > 0$，取

$$N > \frac{5}{\varepsilon}.$$

则 $n > N$ 时有

$$\left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| < \varepsilon.$$

典型例 2： 证明

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad (a > 0).$$

思路： 令 $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$。若 $a > 1$，则 $b_n > 0$，且

$$a = (1 + b_n)^n \ge 1 + nb_n,$$

从而

$$0 < b_n \le \frac{a-1}{n} \to 0.$$

若 $0 < a < 1$，可对 $1/a$ 使用上面的结论。

12.2 用子列证明发散

证明数列或函数极限不存在，优先找两个子列或两条趋近路径。

数列例：

$$a_n = (-1)^n.$$

有

$$a_{2n} = 1, \qquad a_{2n-1} = -1,$$

两个子列极限不同，故 $\{a_n\}$ 发散。

函数例： 证明

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

不存在。取

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}, \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + 3\pi/2}.$$

则

$$x_n \to 0,\quad y_n \to 0,$$

但

$$\sin\frac{1}{x_n} = 1, \qquad \sin\frac{1}{y_n} = -1.$$

12.3 单调有界法

目标：证明数列收敛但不易求极限。

步骤：

1. 证明单调;
2. 证明有界;
3. 由单调有界定理得到收敛;
4. 若有递推关系，令极限为 L，两边取极限求 L。

典型递推例：设

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad x_1 > 0,\ a > 0.$$

常用于构造 $\sqrt{a}$ 。证明：

- 先证 $x_n > 0$；
- 用 AM-GM 得
$$x_{n+1} \ge \sqrt{a}\ ;$$
- 再证从某项起单调递减：
$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \le 0;$$
- 故收敛，设极限为 L，则
$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right),$$
得 $L = \sqrt{a}$ 。

12.4 函数极限常用方法

1. **等价无穷小替换**：
$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$
2. **有理化**：
$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} = \frac{a-b}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}.$$
3. **取对数**：处理幂指函数
$$u(x)^{v(x)} = \exp(v(x)\ln u(x)).$$
4. **夹逼**：常见于含 sin、cos 的有界振荡项。
5. **Taylor 展开**：处理高阶无穷小。

典型例：求

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

由

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

得极限为

$$\frac{1}{2}.$$

典型例：求

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

用

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

得极限为

$$\frac{1}{2}.$$

12.5 连续与一致连续题型

12.5.1 证明连续

常用方式：

1. 直接用 ε-δ；
2. 用四则运算和复合连续性；
3. 分段函数在分界点单独检查。

分段函数在 x_0 连续需要：

$$f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0).$$

12.5.2 证明不连续

找左右极限不同、极限不存在，或极限与函数值不等。

12.5.3 证明一致连续

常用充分条件：

- 闭区间连续；
- Lipschitz 条件：
$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y|;$$
- 导数有界。

12.5.4 证明不一致连续

找两列 x_n, y_n，满足
$$|x_n-y_n| \to 0,$$
但
$$|f(x_n)-f(y_n)| \nrightarrow 0.$$

典型例：$f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续。取
$$x_n=\frac{1}{n}, \qquad y_n=\frac{1}{n+1}.$$
则
$$|x_n-y_n| \to 0,$$
但
$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{y_n}\right|=1.$$

12.6 中值定理证明不等式

常见思路：要证明
$$F(x) \ge 0$$
或某个不等式，构造辅助函数，再用 Rolle 或 Lagrange 中值定理。

典型例：证明 $x>0$ 时
$$\ln(1+x)<x.$$

令
$$f(x)=x-\ln(1+x).$$
则
$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0.$$
又 $f(0)=0$，故 $x>0$ 时 $f(x)>0$。

典型例：证明
$$\sin x<x \qquad (x>0).$$
令
$$f(x)=x-\sin x.$$
则
$$f'(x)=1-\cos x \ge 0,$$
且 $f(0)=0$，故结论成立。

12.7 Taylor 公式题型

12.7.1 求极限

原则：展开到第一个非零项。

例：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

由

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

得极限为

$$\frac{1}{3}.$$

12.7.2 判断极值

若在 x_0 处

$$f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

则看第一个非零高阶项。

- n 偶且系数正：极小；
- n 偶且系数负：极大；
- n 奇：不是极值。

12.7.3 证明不等式

用 Lagrange 余项控制符号。

例：证明 $x>0$ 时

$$e^x>1+x.$$

Taylor：

$$e^x=1+x+\frac{e^{\xi}}{2}x^2>1+x.$$

12.8 不定积分计算模板

12.8.1 换元

看到复合函数乘导数：

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

令

$$u=\varphi(x).$$

例：

$$\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\ln(1+x^2)+C.$$

12.8.2 分部积分

适合：

- 多项式 × 指数；
- 多项式 × 三角；
- $\ln x$；
- 反三角函数。

例：

$$\int\ln x\,dx.$$

令 $u=\ln x$，$dv=dx$，则

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C.$$

12.8.3 三角积分

常用恒等式：

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

若 sin 的奇次幂出现，留一个 $\sin x \, dx$，其余转成 $\cos x$；若 cos 奇次幂出现，类似处理。

12.9 定积分计算模板

12.9.1 利用对称性

若 f 为奇函数：

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0.$$

若 f 为偶函数：

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2\int_{0}^{a} f(x) \, dx.$$

若

$$I = \int_0^a f(x) \, dx,$$

常用替换 $x = a - t$：

$$I = \int_0^a f(a-t) \, dt.$$

12.9.2 变上限积分求导

若

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) \, dt,$$

则

$$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

例：

$$F(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^{-t^2} \, dt.$$

则

$$F'(x) = e^{-\sin^2 x}\cos x - 2xe^{-x^4}.$$

12.9.3 积分和极限

若出现

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

通常转为

$$\int_0^1 f(x) \, dx.$$

更一般地：

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) \, dx.$$

12.10 可积性证明模板

12.10.1 连续函数可积

用一致连续性：给定 $\varepsilon > 0$，存在 δ，使 $|x-y| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

取分割细度小于 δ，得

$$U(T) - L(T) < \varepsilon.$$

12.10.2 单调函数可积

设 f 单调递增。对等分分割，有

$$U(T) - L(T) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \le \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

令 n 充分大即可。

12.10.3 有限间断点函数可积

在间断点附近取很小区间，总长度很小；其余闭子区间上连续，从而可积。用上下和控制。

12.11 反常积分判别模板

12.11.1 p-积分

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

收敛当且仅当

$$p > 1.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

收敛当且仅当

$$p < 1.$$

12.11.2 比较判别

大 x 时若

$$0 \le f(x) \le \frac{C}{x^p}, \quad p > 1,$$

则 $\int^\infty f$ 收敛。

若对充分大的 x 有

$$f(x) \ge \frac{c}{x}, \quad c > 0,$$

且 $f(x) \ge 0$，则 $\int^\infty f$ 发散。

12.11.3 Dirichlet 判别常见例

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

收敛但不绝对收敛。

理由：

$$\int_1^A \sin x\,dx$$

有界，$1/x$ 单调趋于 0。

但

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

发散。

12.12 容易误用的点

1. 收敛数列一定有界，但有界数列不一定收敛。
2. 单调是单调有界定理不可缺少的条件。
3. 函数极限与函数在该点是否定义无关，连续才要求函数值等于极限。
4. 一致连续不是逐点连续；开区间连续不一定一致连续。
5. 可导必连续，连续不一定可导。
6. 在区间上 $f'(x) > 0$ 推出严格递增；$f'(x) \geq 0$ 只推出单调不减。
7. 洛必达必须先确认是未定式。
8. Taylor 展开要展开到第一个非零项。
9. 可积必有界；无界函数不可能 Riemann 可积，但可能有反常积分。
10. 绝对收敛推出收敛，反过来不成立。

13 主要定理证明

13.1 确界刻画

设 $S \neq \varnothing$ 且有上界。证明 $\alpha = \sup S$ 当且仅当：

1. $x \leq \alpha$ 对一切 $x \in S$ 成立；
2. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x_\varepsilon \in S$，使 $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \alpha$。

证明：若 $\alpha = \sup S$，则 α 是上界，所以第一条成立。若第二条不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使所有 $x \in S$ 都满足 $x \leq \alpha - \varepsilon_0$。于是 $\alpha - \varepsilon_0$ 也是上界，且小于 α，与 α 是最小上界矛盾。

反过来，若两条成立，则 α 是上界。任取 $\beta < \alpha$，令 $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$，由第二条存在 $x_\varepsilon \in S$ 使 $x_\varepsilon > \beta$，所以 β 不是上界。因此没有小于 α 的上界，$\alpha = \sup S$。

下确界的证明完全类似，把不等号方向反过来即可。

13.2 数列极限的唯一性、有界性与保序性

唯一性证明：若 $a_n \to a$ 且 $a_n \to b$，对任意 $\varepsilon > 0$，取 N，使 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon.$$

由 ε 任意得 $a = b$。

有界性证明：由 $a_n \to a$，取 $\varepsilon = 1$，存在 N，使 $n > N$ 时 $|a_n - a| < 1$，故 $|a_n| \leq |a| + 1$。前 N 项只有有限个，令

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1\},$$

则对一切 n 有 $|a_n| \leq M$。

保序性证明：若从某项起 $a_n \leq b_n$，且 $a_n \to a$、$b_n \to b$。若 $a > b$，取 $\varepsilon = (a - b)/3$。充分大时

$$a_n > a - \varepsilon, \qquad b_n < b + \varepsilon.$$

而 $a - \varepsilon > b + \varepsilon$，所以 $a_n > b_n$，与 $a_n \leq b_n$ 矛盾。因此 $a \leq b$。

13.3 夹逼定理

设从某项起

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \qquad a_n \to A, \quad b_n \to A.$$

给定 $\varepsilon > 0$，充分大时

$$A - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < A + \varepsilon.$$
因此 $|c_n - A| < \varepsilon$，故 $c_n \to A$。

13.4 单调有界定理

设 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界。令
$$\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}.$$
由上确界刻画，给定 $\varepsilon > 0$，存在 N，使
$$\alpha - \varepsilon < a_N \le \alpha.$$
当 $n \ge N$ 时，由单调性
$$\alpha - \varepsilon < a_N \le a_n \le \alpha,$$
所以 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$。故 $a_n \to \alpha$。单调递减有下界的情形同理，极限为下确界。

13.5 Cauchy 收敛准则

收敛推出 Cauchy： 若 $a_n \to a$，给定 $\varepsilon > 0$，取 N，使 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon/2$。则 $m, n > N$ 时
$$|a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon.$$

Cauchy 推出收敛： 先取 $\varepsilon = 1$，知从某项起 $|a_n - a_N| < 1$，所以数列有界。由致密性定理，存在子列 $a_{n_k} \to a$。再由 Cauchy 性，给定 $\varepsilon > 0$，取 N，使 $m, n > N$ 时 $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$；又取 k 使 $n_k > N$ 且 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$。于是 $n > N$ 时
$$|a_n - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$
故 $a_n \to a$。

13.6 Heine 归结原则

设 f 在 x_0 去心邻域内有定义。

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则对任意 $x_n \ne x_0$ 且 $x_n \to x_0$，由极限定义可知 $f(x_n) \to A$。

反过来，若对任意 $x_n \ne x_0$ 且 $x_n \to x_0$ 都有 $f(x_n) \to A$，但函数极限不等于 A，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使任意 $\delta > 0$，都能找到 x 满足
$$0 < |x - x_0| < \delta, \qquad |f(x) - A| \ge \varepsilon_0.$$
令 $\delta = 1/n$，可取 x_n 满足上述条件。则 $x_n \to x_0$，但 $f(x_n)$ 不趋于 A，矛盾。

13.7 闭区间连续函数的有界性与最值定理

有界性证明： 若 $f \in C[a,b]$ 但无界，则对每个 n，存在 $x_n \in [a,b]$ 使 $|f(x_n)| > n$。由致密性定理，$\{x_n\}$ 有子列 $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$。连续性给出 $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$，从而该子列函数值有界，与 $|f(x_{n_k})| > n_k$ 矛盾。

最值定理证明： 由有界性，令 $M = \sup f([a,b])$。按上确界刻画，存在 $x_n \in [a,b]$，使 $f(x_n) > M - 1/n$。取收敛子列 $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$。由连续性
$$f(x_0) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M.$$
故最大值取得。最小值对 $-f$ 使用同样结论。

13.8 零点定理与介值定理

零点定理证明： 设 $f(a) < 0 < f(b)$。令
$$S = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}.$$
S 非空且有上界，设 $\xi = \sup S$。若 $f(\xi) > 0$，由连续性，ξ 左侧足够近处也有 $f > 0$，与 ξ 是 S 的上确界矛盾。若 $f(\xi) < 0$，由连续性，ξ 右侧足够近处也有 $f < 0$，与 ξ 是上界矛盾。因此 $f(\xi) = 0$。

介值定理证明： 若 C 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，令 $g(x) = f(x) - C$。则 g 连续且两端异号，由零点定理存在 ξ 使 $g(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = C$。

13.9 Cantor 一致连续定理

若 $f \in C[a,b]$ 但不一致连续，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任意 n，可取 $x_n, y_n \in [a,b]$，使

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$
由致密性定理，取子列 $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$。又
$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \to 0,$$
所以 $y_{n_k} \to x_0$。连续性给出
$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \qquad f(y_{n_k}) \to f(x_0),$$
从而 $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$，矛盾。

13.10 Rolle 定理、Lagrange 中值定理与 Cauchy 中值定理

Rolle 定理证明： 由最值定理，f 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值。若最大值等于最小值，则 f 为常数，任取 $\xi \in (a,b)$ 有 $f'(\xi) = 0$。否则最大值或最小值至少有一个在内部点取得。设内部极值点为 ξ，由 Fermat 定理得 $f'(\xi) = 0$。

Lagrange 中值定理证明： 构造
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$
则 $F \in C[a,b]$，在 (a,b) 可导，且 $F(a) = F(b)$。由 Rolle 定理，存在 ξ 使 $F'(\xi) = 0$，即
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cauchy 中值定理证明： 构造
$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$
则 $F(a) = F(b) = 0$。由 Rolle 定理存在 ξ 使 $F'(\xi) = 0$，即
$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$
若 $g'(\xi) \neq 0$，整理得结论。

13.11 Taylor 公式

Peano 余项证明： 设
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$
令 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$。则 $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$。对 $R_n(x)/(x - x_0)^n$ 连续使用洛必达法则 n 次，得到
$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$
即 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$。

Lagrange 余项证明： 设 $x \neq x_0$，令
$$R = f(x) - P_n(x).$$
构造
$$F(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k - R\frac{(t - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}.$$
则 $F(x_0) = F'(x_0) = \cdots = F^{(n)}(x_0) = 0$ 且 $F(x) = 0$。连续使用 Rolle 定理 $n+1$ 次，存在 ξ 介于 x_0 与 x 之间，使 $F^{(n+1)}(\xi) = 0$。整理得
$$R = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

13.12 区间套定理与聚点定理

区间套定理证明： 设 $[a_n, b_n]$ 递减且 $b_n - a_n \to 0$。由单调性，$\{a_n\}$ 单调递增且有上界，故收敛到 α；$\{b_n\}$ 单调递减且有下界，故收敛到 β。又
$$0 \leq \beta - \alpha = \lim(b_n - a_n) = 0,$$
所以 $\alpha = \beta$。记公共极限为 ξ，则对每个 n 有 $a_n \leq \xi \leq b_n$。若还有 η 属于所有区间，则 $|\eta - \xi| \leq b_n - a_n$ 对一切 n 成立，令 $n \to \infty$ 得 $\eta = \xi$。

聚点定理证明： 对有界无限点集 S，取闭区间 $[a,b]$ 包含 S。把区间二等分，至少有一半含有 S 的无限多个点，取这一半为 $[a_1, b_1]$。反复二分，得到区间套 $[a_n, b_n]$，每个区间都含有 S 的无限多个点，且长度趋于 0。由区间套定理存

在唯一 ξ 属于所有区间。任意邻域内包含某个 $[a_n, b_n]$，其中有无限多个 S 中的点，故 ξ 是聚点。

13.13 Riemann 可积的常用充分条件

连续函数可积：由 Cantor 定理，f 在 $[a,b]$ 上一致连续。给定 $\varepsilon > 0$，取 δ，使 $|x-y| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

当分割 T 的细度小于 δ 时，每个小区间上的振幅小于 $\varepsilon/(b-a)$，所以

$$U(T) - L(T) < \sum_i \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \varepsilon.$$

故 f 可积。

单调函数可积：设 f 单调递增。取等分分割，$\Delta x = (b-a)/n$。则

$$U(T) - L(T) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

令 n 足够大，即可使上、下和之差小于任意 ε，故可积。单调递减同理。

13.14 微积分基本定理

设

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

若 f 在 x 处连续，则

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

再减去 $f(x)$，得

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \sup_{t \text{ 介于 } x, x+h} |f(t) - f(x)|.$$

由 f 在 x 处连续，右端随 $h \to 0$ 趋于 0，所以 $F'(x) = f(x)$。

若 $f \in C[a,b]$ 且 $\Phi' = f$，则 $F - \Phi$ 导数恒为 0，故 $F - \Phi$ 为常数。于是

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

13.15 反常积分的比较判别与 Dirichlet 判别

比较判别证明：若 $0 \le f \le g$，且 $\int_a^\infty g$ 收敛，则对 $A > B > a$，

$$0 \le \int_B^A f \le \int_B^A g.$$

由 g 的 Cauchy 准则，右端可任意小，故 $\int_a^\infty f$ 收敛。若 $\int f$ 发散而 $\int g$ 收敛，则刚证出的结论会推出 $\int f$ 收敛，矛盾；故 $\int g$ 发散。

Dirichlet 判别证明：设 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 有界，g 单调趋于 0。对 $A < B$ 作分部积分：

$$\int_A^B f(x)g(x)\,dx = F(B)g(B) - F(A)g(A) - \int_A^B F(x)\,dg(x).$$

若 $|F| \le M$，利用 g 单调且趋于 0，可得尾积分绝对值由 $C|g(A)|$ 控制，随 $A \to \infty$ 趋于 0。由 Cauchy 准则，积分收敛。